Manuela Magalhães Hill
Mariana Marques dos Santos

VOL. 2

INVESTIGAÇÃO OPERACIONAL

EXERCÍCIOS DE PROGRAMAÇÃO LINEAR

3ª Edição

EDIÇÕES SÍLABO

INVESTIGAÇÃO OPERACIONAL

EXERCÍCIOS
DE PROGRAMAÇÃO LINEAR

Manuela Magalhães Hill
Mariana Marques dos Santos

COM EXERCÍCIOS PROPOSTOS E RESOLVIDOS

3ª EDIÇÃO
REVISTA E CORRIGIDA

EDIÇÕES SÍLABO

Visite a Sílabo na rede
www.silabo.pt

FICHA TÉCNICA:

Título: Investigação Operacional – Vol. 2 – Exercícios de Programação Linear
Autores: Manuela Magalhães Hill e Mariana Marques dos Santos

Capa: Pedro Mota

1ª Edição – Lisboa, Setembro de 2009.
3ª Edição – Lisboa, Janeiro de 2018.
Impressão e acabamentos: ARTIPOL – Artes Tipográficas, Lda.
Depósito legal: 436195/18
ISBN: 978-972-618-932-9

EDIÇÕES SÍLABO, LDA.

R. Cidade de Manchester, 2
1170-100 Lisboa
Telf.: 218130345
Fax: 218166719
e-mail: silabo@silabo.pt
www.silabo.pt

Índice

CAPÍTULO 1
Formulação de problemas 9

CAPÍTULO 2
Resolução gráfica 39

CAPÍTULO 3
Algoritmo do Simplex 53

CAPÍTULO 4
Casos especiais 67

CAPÍTULO 5
Resolução de problemas com variáveis artificiais 83

CAPÍTULO 6
Dualidade 111

CAPÍTULO 7
Relações primal-dual 125

CAPÍTULO 8
Análise de sensibilidade e de variação 151

CAPÍTULO 9
Análise de outputs 191

CAPÍTULO 10
Exercícios de exame 217

Prefácio

A publicação do livro «Investigação Operacional – Vol.1 – Programação Linear» traduziu a intenção das autoras de apresentação de uma visão prática da Programação Linear. Desde o início que este projecto incluía a disponibilização de um volume complementar de exercícios que incluiria as resoluções dos exercícios propostos no fim de cada capítulo, para além de outros exemplos e exercícios adicionais.

Este novo volume vem assim traduzir uma ferramenta útil para o gestor ou executivo que pretenda melhorar a sua agilidade na resolução de problemas do foro da Programação Linear, e para o gestor de amanhã, ou seja, o estudante dos cursos de Gestão, Economia, Engenharia ou Matemática, que pretenda ter uma visão aplicada da Investigação Operacional.

Considerando a forte ligação entre esta obra e o livro texto, de notar que se podem encontrar os exercícios estruturados em 10 capítulos que correspondem no essencial aos vários temas explorados no volume I. Deste modo, é fácil para o leitor acompanhar a resolução dos exercícios com a leitura do livro texto.

O conteúdo destes capítulos traduz, em grande parte, uma selecção cuidada de questões colocadas em testes e exames finais, não só do ISCTE, onde as autoras leccionam, mas também de outras Escolas Superiores onde a disciplina é ministrada.

Por último, e relativamente à filosofia subjacente a esta obra, tal como acontece no livro texto, torna-se importante salientar os três aspectos essenciais que foram explorados intencionalmente, como complemento das técnicas de resolução de problemas deste tipo: a formulação de problemas, a interpretação da solução óptima e ainda a análise subsequente à obtenção dessa solução.

A título de conclusão, gostaríamos de deixar uma palavra especial de agradecimento aos colegas da equipa de Investigação Operacional do ISCTE pelo apoio e inspiração que prestaram, bem como, pela sua importante contribuição na elaboração de alguns dos exercícios aqui apresentados. Às colegas Ana Líbano Monteiro e Maria João Lopes um reconhecimento muito particular pelos importantes comentários feitos sobre o manuscrito, pelos contributos válidos e ajuda na revisão do texto.

As autoras

1

Formulação de problemas

EXERCÍCIO 1

Uma empresa de estampagem fabrica saladeiras e tigelas de aço inoxidável. Para isso, utiliza como matéria-prima chapas de aço de tamanho único. Com cada chapa podem-se estampar uma saladeira e duas tigelas, ou então seis tigelas.

A firma vende cada saladeira a 80 euros e cada tigela a 25 euros. Cada chapa custa 60 euros. Os restantes custos são fixos.

Sabe-se por experiência passada que não se conseguem vender mais do que quatro tigelas por cada saladeira. O número total de chapas disponíveis é de 680.

Deseja-se conhecer a quantidade a produzir de cada artigo de modo a maximizar o lucro. Formule em P.L.

Resolução

- *Variáveis de decisão*

x_1 — N.º de tigelas fabricadas em lotes de 2

x_2 — N.º de saladeiras fabricadas

x_3 — N.º de tigelas fabricadas em lotes de 6

x_4 — N.º de chapas utilizadas para tigelas e saladeiras

x_5 — N.º de chapas utilizadas para tigelas

- *Função objectivo*

$$\text{Max } Z = 25x_1 + 80x_2 + 25x_3 - 60x_4 - 60x_5$$

- *Restrições*

$$\left.\begin{array}{l} 3x_4 = x_1 + x_2 \\ x_1 = 2x_2 \end{array}\right\} \text{ou} \quad \left.\begin{array}{l} x_4 = x_2 \\ x_1 = 2x_4 \end{array}\right\} \text{Cada chapa dá para uma saladeira e 2 tigelas ...}$$

$$x_5 = \frac{x_3}{6} \quad \Big\} \text{... ou para 6 tigelas}$$

$$x_2 \geq \frac{x_1 + x_3}{4} \quad \Big\} \text{Não se conseguem vender mais do que 4 tigelas por cada saladeira}$$

$$x_4 + x_5 \leq 680 \quad \Big\} \text{N.º máximo de chapas disponíveis}$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \text{ inteiros} \end{array}\right\} \text{Condição de não negatividade e indivisibilidade}$$

- ***Formulação alternativa 1***

- *Variáveis de decisão*

x_1 — N.º de tigelas fabricadas

x_2 — N.º de saladeiras fabricadas

Sabemos que cada saladeira corresponde a uma chapa. Subtraindo ao número total de tigelas o número de tigelas em lotes de 2 ficamos com o número de tigelas fabricadas em lotes de 6. Dividindo por 6 ficamos com o número de chapas utilizadas somente para tigelas. Então, o número total de chapas será:

$$\text{Número total de chapas} = x_2 + \frac{x_1 - 2\,x_2}{6}$$

- *Função objectivo*

$$\begin{aligned} Max\ Z &= 25\,x_1 + 80\,x_2 - 60\left(x_2 + \frac{x_1 - 2\,x_2}{6}\right) \\ &= 15\,x_1 + 40\,x_2 \end{aligned}$$

- *Restrições*

$x_1 \leq 4\,x_2$ } Não se conseguem vender mais do que 4 tigelas por cada saladeira

$x_2 + \dfrac{x_1 - 2\,x_2}{6} \leq 680$ } N.º máximo de chapas disponíveis

$x_1\,,\,x_2 \geq 0$
$x_1\,,\,x_2$ inteiros } Condição de não negatividade e indivisibilidade

- ***Formulação alternativa 2***

- *Variáveis de decisão*

x_1 — N.º de chapas utilizadas para produzir saladeiras e tigelas em lotes de 2

x_2 — N.º de chapas utilizadas para produzir tigelas em lotes de 6

Número total de tigelas $= 2\,x_1 + 6\,x_2$

Número total de saladeiras $= x_1$

- *Função objectivo*

$$\begin{aligned} Max\ Z &= 80\ x_1 + 25(2\,x_1 + 6\,x_2) - 60\,x_1 - 60\,x_2 \\ &= 70\,x_1 + 90\,x_2 \end{aligned}$$

- *Restrições*

$2\ x_1 + 6\ x_2 \leq 4\ x_1$ } Não se conseguem vender mais do que 4 tigelas por cada saladeira

$x_1 + x_2 \leq 680$ } N.º máximo de chapas disponíveis

$x_1\ ,\ x_2 \geq 0$
$x_1\ ,\ x_2$ inteiros } Condição de não negatividade e indivisibilidade

EXERCÍCIO 2

O Ministério da Saúde possui cinco locais possíveis para instalação de centros de saúde, para servir quatro centros populacionais. Construiu-se um índice que exprime o inconveniente de servir cada centro populacional pelo centro de saúde de cada local, tendo em conta o número de habitantes servidos e os meios de transporte existentes. Os resultados constam na seguinte tabela:

	*S*1	*S*2	*S*3	*S*4	*S*5
*P*1	40	43	42	38	45
*P*2	37	40	41	44	36
*P*3	40	42	39	37	38
*P*4	45	40	39	42	41

2.A) Sabendo que toda a população de um mesmo centro populacional tem que ser servida pelo mesmo centro de saúde e que cada centro de saúde serve apenas um centro populacional, formule o problema em P.L.

2.B) Suponha agora que cada centro de saúde pode servir mais do que um centro populacional, desde que o número total de habitantes dos centros populacionais afectos ao mesmo centro de saúde não seja superior a 5000. O número de habitantes dos centros populacionais é dado na tabela seguinte:

*P*1	*P*2	*P*3	*P*4
2500	2000	3000	3000

Formule em P.L.

RESOLUÇÃO

2.A) Este tipo de situação traduz um problema a que se chama problema de afectação.

- ***Dados***

Índice de inconveniência de servir cada centro populacional P_i por cada centro de saúde S_j.

	*S*1	*S*2	*S*3	*S*4	*S*5
*P*1	40	43	42	38	45
*P*2	37	40	41	44	36
*P*3	40	42	39	37	38
*P*4	45	40	39	42	41

- ***Formulação***

- *Variáveis de decisão*

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se o centro populacional } P_i \text{ é servido pelo centro de saúde } S_j \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$i = 1, 2, 3, 4 \qquad j = 1, 2, 3, 4, 5$

- *Função objectivo*

Min Índice de inconveniência (II)

$$\begin{aligned} II = {} & 40\,x_{11} + 43\,x_{12} + 42\,x_{13} + 38\,x_{14} + 45\,x_{15} \\ & + 37\,x_{21} + 40\,x_{22} + 41\,x_{23} + 44\,x_{24} + 36\,x_{25} \\ & + 40\,x_{31} + 42\,x_{32} + 39\,x_{33} + 37\,x_{34} + 38\,x_{35} \\ & + 45\,x_{41} + 40\,x_{42} + 39\,x_{43} + 42\,x_{44} + 41\,x_{45} \end{aligned}$$

- *Restrições*

$$\left.\begin{array}{l} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 1 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 1 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} = 1 \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + x_{45} = 1 \end{array}\right\}$$

Cada centro populacional P_i só pode ser servido por um centro de saúde S_j

$$\left.\begin{array}{l} x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} \leq 1 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} \leq 1 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} \leq 1 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} \leq 1 \\ x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} \leq 1 \end{array}\right\}$$

Cada centro de saúde S_j só pode servir um centro populacional P_i

$x_{ij} \in \{0,1\} \quad i = 1, \ldots, 4; \quad j = 1, \ldots, 5$ — Variáveis binárias

2.B) A este tipo de problemas dá-se o nome de problema de afectação generalizada porque um centro populacional só pode ser servido por um centro de saúde mas cada centro de saúde pode servir mais do que um centro populacional.

A formulação é semelhante à apresentada na alínea anterior, bastando acrescentar mais um bloco de restrições que contemplem a nova situação.

- ***Dados***

Dados da alínea anterior e adicionalmente:

— Cada centro de saúde pode servir mais do que um centro populacional

— N.º de utentes de cada centro de saúde $\leq$ 5000

— N.º de habitantes dos centros populacionais e índice de inconveniência de serem servidos pelos centros de saúde (idêntico à alínea anterior):

	*S*1	*S*2	*S*3	*S*4	*S*5	N.º Hab.
*P*1	40	43	42	38	45	2500
*P*2	37	40	41	44	36	2000
*P*3	40	42	39	37	38	3000
*P*4	45	40	39	42	41	3000

- ***Formulação***
- *Variáveis de decisão*

Mantêm-se as mesmas da alínea 2.A), x_{ij}

- *Função objectivo*

Min Índice de inconveniência (II) = função objectivo inicial.

- *Restrições*

$$\left.\begin{array}{l} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 1 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 1 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} = 1 \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + x_{45} = 1 \end{array}\right\} \text{Cada centro populacional } P_i \text{ só pode ser servido por um centro de saúde } S_j$$

$$\left.\begin{array}{l} 2500\,x_{11} + 2000\,x_{21} + 3000\,x_{31} + 3000\,x_{41} \le 5000 \\ 2500\,x_{12} + 2000\,x_{22} + 3000\,x_{32} + 3000\,x_{42} \le 5000 \\ 2500\,x_{13} + 2000\,x_{23} + 3000\,x_{33} + 3000\,x_{43} \le 5000 \\ 2500\,x_{14} + 2000\,x_{24} + 3000\,x_{34} + 3000\,x_{44} \le 5000 \\ 2500\,x_{15} + 2000\,x_{25} + 3000\,x_{35} + 3000\,x_{45} \le 5000 \end{array}\right\} \text{Cada centro de saúde } S_j \text{ pode servir mais do que 1 centro populacional } P_i \text{ desde que não sirva mais do que 5000 habitantes}$$

$x_{ij} \in \{0,1\} \quad i = 1, \ldots, 4; \quad j = 1, \ldots, 5$ — Variáveis binárias

EXERCÍCIO 3

A QUIMEX tem vindo a diagnosticar uma deterioração da sua imagem. É acusada, aliás com fundamento, de ser responsável pelos elevados níveis de poluição do Rio Alvéolo. A administração considera que chegou o momento de resolver o problema e encomendou por isso um estudo que tem por objectivo determinar a possibilidade de compatibilizar a redução ao normal da emissão de resíduos poluentes com os objectivos económicos definidos para o corrente exercício.

A QUIMEX produz três tipos de fertilizantes. O fertilizante *A* emite 50 unidades de resíduos tóxicos por tonelada produzida, o fertilizante *B*, 40 unidades por tonelada e o fertilizante *C*, 60 unidades por tonelada.

Os preços de venda são respectivamente para os fertilizantes *A*, *B* e *C*, de 20, 25 e 30 euros por tonelada. Os custos por tonelada são de 10 euros para o fertilizante *A* e 20 euros para os fertilizantes *B* e *C*.

Para que se cumpra o plano, o lucro mínimo mensal deve ser de 100 mil euros.

A empresa tem capacidade instalada para produzir 15 000 toneladas de fertilizante por mês e não pretende trabalhar a menos de 80% da capacidade. Não existem problemas de escoamento para qualquer um dos tipos de fertilizante.

Compromissos já assumidos obrigam a QUIMEX a entregar a um cliente 5 000 toneladas mensais de fertilizante *A*.

3.A) Formule o problema.

3.B) Considere agora a seguinte informação adicional: todo o fertilizante deve ser ensacado na semana em que é produzido. O ensacamento é feito no exterior em duas empresas sub-contratadas. A capacidade disponível de cada uma das sub-contratadas por semana (em toneladas ensacadas), no mês de Março, é dada pelos seguintes quadros:

SUBCONTRATADA 1

	A	*B*	*C*
1ª semana	1000	—	—
2ª semana	1000	1000	500
3ª semana	—	1000	1000
4ª semana	2500	—	—

SUBCONTRATADA 2

	A	*B*	*C*
1ª semana	2000	—	1000
2ª semana	—	1000	500
3ª semana	—	1000	—
4ª semana	3500	3000	5000

Que alterações terá que fazer ao modelo formulado na alínea anterior para integrar esta nova informação no planeamento da produção do mês de Março?

RESOLUÇÃO

3.A)

- ***Dados***

	Residuos/tn	*Preço Venda*	*Custos*
Fertilizante A	50	20	10
Fertilizante B	40	25	20
Fertilizante C	60	30	20

— Lucro mínimo mensal: 100 mil euros

— Capacidade instalada: 15 000 ton/mês

— Capacidade mínima: 0,80 $\times$ 15 000 ton/mês

— Fertilizante *A* $\geq$ 5000 ton/mês

- ***Formulação***
- *Variáveis de decisão*

x_1 — toneladas de fertilizante tipo A produzido por mês

x_2 — toneladas de fertilizante tipo B produzido por mês

x_3 — toneladas de fertilizante tipo C produzido por mês

- *Função objectivo*

Min Poluição = $50\ x_1 + 40\ x_2 + 60\ x_3$

- *Restrições*

$$\text{s.a.} \quad \begin{cases} (20 - 10)\,x_1 + (25 - 20)\,x_2 + (30 - 20)\,x_3 \geq 100000 \\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 15000 \\ x_1 + x_2 + x_3 \geq 0{,}8 \times 15000 \\ x_1 \geq 5000 \\ x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, 3 \end{cases}$$

3.B)

- ***Dados adicionais***

Capacidade semanal das duas sub-contratadas:

TIPOS DE FERTILIZANTE

	A	B	C
1ª semana	3000	—	1000
2ª semana	1000	2000	1000
3ª semana	—	2000	1000
4ª semana	6000	3000	5000

- ***Formulação***
- *Variáveis de decisão*

Acrescentar ao modelo as seguintes variáveis com coeficiente zero na função objectivo:

y_{ij} – quantidade de fertilizante de tipo j ($j = A, B, C$) ensacado (ou produzido) na semana i ($i = 1, 2, 3, 4$)

- *Função objectivo*

Mantém-se a mesma função que em 3.A), pois $c^0_{y_{ij}} = 0$

- *Restrições*

Acrescentar as seguintes restrições:

$y_{11} + y_{21} + y_{31} + y_{41} = x_1$
$y_{12} + y_{22} + y_{32} + y_{42} = x_2$
$y_{13} + y_{23} + y_{33} + y_{43} = x_3$
$y_{11} \leq 3000$
$y_{12} = 0$
$y_{13} \leq 1000$
$y_{21} \leq 1000$
$y_{22} \leq 2000$
$y_{23} \leq 1000$
$y_{31} = 0$
$y_{32} \leq 2000$
$y_{33} \leq 1000$
$y_{41} \leq 6000$
$y_{42} \leq 3000$
$y_{43} \leq 5000$

- ***Formulação final***

Min Poluição $= 50\,x_1 + 40\,x_2 + 60\,x_3$

s.a. $(20 - 10)\,x_1 + (25 - 20)\,x_2 + (30 - 20)\,x_3 \geq 100\,000$
$x_1 + x_2 + x_3 \leq 15\,000$
$x_1 + x_2 + x_3 \geq 0{,}8 \times 15\,000$
$x_1 \geq 5000$
$y_{11} + y_{21} + y_{31} + y_{41} = x_1$
$y_{12} + y_{22} + y_{32} + y_{42} = x_2$
$y_{13} + y_{23} + y_{33} + y_{43} = x_3$
$y_{11} \leq 3000$
$y_{12} = 0$
$y_{13} \leq 1000$
$y_{21} \leq 1000$
$y_{22} \leq 2000$
$y_{23} \leq 1000$
$y_{31} = 0$
$y_{32} \leq 2000$
$y_{33} \leq 1000$
$y_{41} \leq 6000$
$y_{42} \leq 3000$
$y_{43} \leq 5000$
$x_j \geq 0 \qquad j = 1, 2, 3$
$y_{ij} \geq 0 \qquad i = 1, 2, 3, 4; \quad j = 1, 2, 3$

Olhando para a formulação acima podemos constatar que as variáveis x_1, x_2, x_3 são dispensáveis, bem como as variáveis y_{12} e y_{31}. Sendo assim, a formulação pode ser simplificada como se segue:

- ***Formulação alternativa***

(Nota: não existem y_{12} e y_{31})

$$\text{Min Poluição} = 50(y_{11} + y_{21} + y_{41}) + 40(y_{22} + y_{32} + y_{42}) + 60(y_{13} + y_{23} + y_{33} + y_{43})$$

s.a.

$$10(y_{11} + y_{21} + y_{41}) + 5(y_{22} + y_{32} + y_{42}) + 10(y_{13} + y_{23} + y_{33} + y_{43}) \geq 100000$$

$$\sum_i \sum_j y_{ij} \leq 15000$$

$$\sum_i \sum_j y_{ij} \geq 12000$$

$$y_{11} \leq 3000$$
$$y_{13} \leq 1000$$
$$y_{21} \leq 1000$$
$$y_{22} \leq 2000$$
$$y_{23} \leq 1000$$
$$y_{32} \leq 2000$$
$$y_{33} \leq 1000$$
$$y_{41} \leq 6000$$
$$y_{42} \leq 3000$$
$$y_{43} \leq 5000$$
$$y_{ij} \geq 0 \qquad i = 1, 2, 3, 4; \quad j = 1, 2, 3$$

EXERCÍCIO 4

Uma empresa têxtil possui duas fábricas, *F*1 e *F*2, situadas no interior e no litoral do país. A fábrica *F*1 possui uma capacidade produtiva mensal de 6000 casacos e a fábrica *F*2 de 9000 casacos.

Após a confecção, os casacos são enviados para quatro armazéns, *A*1, *A*2, *A*3 e *A*4, para posteriormente serem distribuídos. A fábrica *F*1 apenas pode enviar casacos para os armazéns *A*1, *A*2 e *A*3, enquanto que a fábrica *F*2 tem apenas acesso aos armazéns *A*2, *A*3 e *A*4.

Os custos unitários de transporte, assim como as capacidades dos armazéns encontram-se na tabela seguinte.

	*A*1	*A*2	*A*3	*A*4
*F*1	40	50	55	—
*F*2	—	60	30	50
Capacidades	2500	4500	5500	3500

4.A) Formule em P. L. tendo em vista a minimização do custo total de transporte.

4.B) Suponha que os casacos enviados para o armazém *A*1 se destinam exclusivamente a satisfazer encomendas do Sul do país enquanto que os enviados para o armazém *A*4 são apenas utilizados para encomendas do Norte do país.

Reformule o problema sabendo que as encomendas do Norte do país são 8000 casacos e as do Sul de 5000 casacos.

Resolução

4.A)

- ***Dados***

— Custos unitários de transporte

		Armazéns (Procura)				*Capacidade produtiva*
		A_1	A_2	A_3	A_4	
Fábricas (Oferta)	F_1	40	50	55	—	6000
	F_2	—	60	30	50	9000
Capacidade		2500	4500	5500	3500	

- ***Formulação***

- *Variáveis de decisão*

x_{ij} – N.º de casacos transportados da fábrica i para o armazém j (com $i = 1{,}2$; $j = 1, 2, 3, 4$) (Nota: não existem x_{14} e x_{21})

- *Função objectivo*

$$\begin{aligned}\text{Min}\,C = {} & 40\,x_{11} + 50\,x_{12} + 55\,x_{13} + \\ & + 60\,x_{22} + 30\,x_{23} + 50\,x_{24}\end{aligned}$$

- *Restrições*

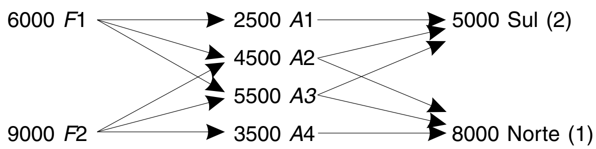
$$\left.\begin{array}{l} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 6000 \\ x_{22} + x_{23} + x_{24} = 9000 \end{array}\right\} \text{Capacidade das fábricas (15 000)}$$

$$\left.\begin{array}{ll} x_{11} & \leq 2500 \\ x_{12} + x_{22} & \leq 4500 \\ x_{13} + x_{23} & \leq 5500 \\ x_{24} & \leq 3500 \end{array}\right\} \text{Capacidade dos armazéns (16 000)}$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad i = 1, 2; \quad j = 1, 2, 3, 4$$

4.B)

- ***Dados adicionais***



- ***Formulação***

- *Variáveis de decisão*

x_{ij} – N.º casacos transportados da fábrica i para o armazém j
($i = 1, 2$; $j = 1, 2, 3, 4$)

y_{jk} – N.º casacos transportados do armazém j para a região k
($k = 1$ (Norte), 2 (Sul)) com $j = 1, 2, 3, 4$

Não existem y_{11} e y_{42}

O número de casacos que vão circular neste sistema é condicionado pela capacidade das zonas Norte e Sul $(8000 + 5000 = 13\,000)$.

- *Função objectivo*

$$\text{Min } C = 40\,x_{11} + 50\,x_{12} + 55\,x_{13} + \\ + 60\,x_{22} + 30\,x_{23} + 50\,x_{24}$$

- *Restrições*

$$\left.\begin{array}{l} x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 6000 \\ x_{22} + x_{23} + x_{24} \leq 9000 \end{array}\right\} \text{capacidade das fábricas}$$

$$\left.\begin{aligned} x_{11} \qquad\qquad & \leq 2500 \\ x_{12} + x_{22} \qquad & \leq 4500 \\ x_{13} + x_{23} \qquad & \leq 5500 \\ x_{24} \qquad & \leq 3500 \end{aligned}\right\} \text{capacidade dos armazéns}$$

$$\begin{aligned} y_{21} + y_{31} + y_{41} &= 8000 \\ y_{12} + y_{22} + y_{32} &= 5000 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_{12} &= x_{11} \\ y_{21} + y_{22} &= x_{12} + x_{22} \\ y_{31} + y_{32} &= x_{13} + x_{23} \\ y_{41} &= x_{24} \end{aligned}$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, 3 \qquad j = 1, 2, 3, 4$$

$$y_{jk} \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4 \qquad k = 1, 2, 3$$

$$\nexists\ x_{14}, x_{21}, y_{11}, y_{42},$$

(Nota: esta formulação pode ser simplificada eliminando as variáveis x_{11} e x_{24} ou as variáveis y_{12} e y_{41}, uma vez que $y_{12} = x_{11}$ e $y_{41} = x_{24}$).

EXERCÍCIO 5

Uma organização internacional de apoio aos países menos desenvolvidos pretende planear a sua actividade para o próximo ano. Com base em estudos já efectuados foi seleccionado um país no qual a actividade será desenvolvida. A organização pretende intervir nas áreas de combate à fome, vacinação infantil e alfabetização de adultos. Com base na experiência dos anos anteriores a organização definiu cinco tipos de projectos de duração anual.

A informação sobre cada tipo de projecto encontra-se nas tabelas 1 e 2.

TABELA 1. RECURSOS HUMANOS ASSOCIADOS A CADA PROJECTO

Projecto	*N.º de equipas médicas*	*N.º de alfabetizadores*
$P1$	5	—
$P2$	4	—
$P3$	3	4
$P4$	—	8
$P5$	—	7

TABELA 2. RECURSOS MATERIAIS ASSOCIADOS A CADA PROJECTO

Projecto	*Cereais (milhares de ton.)*	*Recursos financeiros (u.m.)*
$P1$	14	20
$P2$	18	21
$P3$	23	35
$P4$	12	25
$P5$	18	28

A organização dispõe de 130 equipas médicas, 175 alfabetizadores, 540 milhares de toneladas de cereais e 980 u.m. para afectar aos projectos.

Os resultados previstos para cada tipo de projecto encontram-se na tabela 3.

TABELA 3. RESULTADOS PREVISTOS PARA CADA PROJECTO

Projecto	*Crianças vacinadas (milhares)*	*Adultos alfabetizados (milhares)*
$P1$	80	—
$P2$	70	—
$P3$	60	0,35
$P4$	—	0,90
$P5$	—	0,60

A organização pretende vacinar pelo menos meio milhão de crianças e alfabetizar pelo menos cinco milhares de adultos.

Formule o problema em P.L. sabendo que o objectivo principal é desenvolver o maior número possível de projectos.

MANUELA MAGALHÃES HILL licenciou-se em Matemática Aplicada pela Faculdade de Ciências de Lisboa, frequentou o curso de pós-graduação em Matemática Aplicada à Investigação Operacional da Fundação Calouste Gulbenkian e, em 1987, doutorou-se em Economia (Universidade de Keele, R. U.). Actualmente é Professora Catedrática no Departamento de Métodos Quantitativos do ISCTE onde coordena o mestrado em Prospecção e Análise de Dados e lecciona nas licenciaturas e mestrados em Gestão de Empresas e Economia. Tem coordenado e participado em vários projectos de investigação na especialização de métodos estatísticos e econométricos aplicados às Ciências Sociais. De 1972 a 1988 acumulou as funções docentes com as de técnica no Gabinete de Estudos e Planeamento do Ministério da Educação.

MARIANA MARQUES DOS SANTOS BELMAR DA COSTA é licenciada em Gestão de Empresas pela Universidade Católica Portuguesa e detém um MBA pelo INSEAD (Fontainebleau), tendo também frequentado o mesmo programa em Kellogg – Northwestern University, em Chicago. De 1989 a 2006, afecta ao Departamento de Métodos Quantitativos, foi docente universitária no ISCTE. A par das actividades académicas, desenvolveu uma carreira empresarial ligada a diversas áreas e funções. Começando por colaborar com uma instituição financeira internacional na área de gestão de carteiras de títulos, ingressou depois numa equipa de capital de risco, onde foi analista de projectos, noutra instituição financeira nacional. Foi também consultora em Madrid, numa empresa multinacional, estando associada a diversos projectos entre os quais o lançamento da sucursal portuguesa. Assumiu de seguida uma sucessão de pelouros internacionais, dentro de um grupo de empresas na área da construção e engenharia civil, nomeadamente em Moçambique e na Alemanha, gerindo projectos em diversas áreas como a alimentar ou a produção e distribuição de materiais de construção. Finalmente, iniciou um projecto empresarial próprio na área do comércio internacional de medicamentos, ao qual se dedica actualmente.

Para o leitor que pretenda exercitar ou consolidar os seus conhecimentos em *Investigação Operacional – Programação linear*, este livro pode ser utilizado como instrumento de apoio ao primeiro volume desta obra. Para além de incluir as resoluções dos exercícios propostos no fim de cada capítulo do volume 1, inclui ainda outros exemplos e exercícios adicionais.

Tendo como base enunciados ilustrativos de situações reais, este trabalho é uma ferramenta útil quer para o gestor ou executivo que deseje melhorar a sua agilidade na resolução de problemas na área da programação linear, quer para o gestor de amanhã, ou seja, o estudante dos cursos de Gestão, Economia, Engenharia ou Matemática, que pretenda uma visão aplicada da Investigação Operacional.

221

INVESTIGAÇÃO OPERACIONAL

Vol. 1 – Programação Linear
Vol. 2 – Exercícios de Programação Linear
Vol. 3 – Transportes, Afectação e Optimização em redes

ISBN 978-972-618-932-9
9 789726 189329